ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

GIÁP THỊ THỦY

ĐỊNH LÝ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ NOETHER VÀ Ý NGHĨA HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

GIÁP THỊ THỦY

ĐỊNH LÝ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ NOETHER VÀ Ý NGHĨA HÌNH HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. PHẠM HÙNG QUÝ

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 8 năm 2015
Người viết luận văn

Giáp Thị Thủy

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành, sâu sắc tới TS. Phạm Hùng Quý, thầy là người trực tiếp hướng dẫn, tận tình chỉ bảo, giúp đỡ và động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy cô trong khoa Toán, các bạn học viên lớp cao học Toán k21b đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Qua đây, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới người thân trong gia đình, bạn bè đã luôn động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình hoàn thành khóa học

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn vẫn không tránh khỏi những sai sót và hạn chế. Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của thầy cô và bạn bè để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 8 năm 2015

Người viết luận văn

Giáp Thị Thủy

Mục lục

MỞ ĐẦU

Một trong những định lý kinh điển nhất của Toán học là Định lý cơ bản của số học. Định lý khẳng định rằng: Mọi số nguyên dương đều phân tích được thành tích các lũy thừa của các số nguyên tố. Định lý phân tích nguyên sơ của Noether là sự mở rộng Định lý cơ bản của số học cho một lớp rộng lớn các vành Noether. Định lý được chứng minh bởi Emmy Noether vào đầu thế kỷ XX và đã trở thành nền tảng cho Đại số giao hoán và hình học đại số. Cho một vành Noether, định lý khẳng định rằng mọi iđêan đều phân tích được thành giao của một số hữu hạn iđêan nguyên sơ. Tương ứng hình học của định lý phân tích nguyên sơ Noether là: Mọi tập đại số đều là hợp của hữu hạn tập đại số bất khả quy. Chính vì ý nghĩa quan trọng của Định lý phân tích nguyên sơ Noether tác giả luận văn đặt mục tiêu tìm hiểu nó và ý nghĩa hình học của các đối tượng liên quan. Luận văn được viết thành hai chương.
Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản của Đại số giao hoán như: Vành, môđun, iđêan nguyên tố, địa phương hóa, bổ đề Nakayama.
Chương 2: Trình bày nội dung chính của luận văn. Chúng tôi nhắc lại khái niệm về vành, môđun Noether và Định lý cơ sở của Hilbert. Chúng tôi trình bày về Định lý phân tích nguyên sơ Noether và tập iđêan nguyên tố liên kết. Ý nghĩa hình học và phân tích nguyên sơ của iđêan đơn thức, iđêan cạnh được đưa ra ở cuối chương dùng để minh họa cho Định lý phân tích nguyên sơ.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ luận văn này, chúng ta luôn xét vành là vành giao hoán có đơn vị.

Định nghĩa 1.0.1. Cho R là một vành, một tập con I của R được gọi là một iđêan của vành R nếu thỏa mãn:

(i) I là nhóm con của R với phép cộng $+$;

(ii) Với mọi phần tử x thuộc R, mọi phần tử a thuộc I thì $xa \in I$ $(ax \in I)$.

Định nghĩa 1.0.2. Cho $\mathfrak{p}$ là một iđêan thật sự của R. Khi đó $\mathfrak{p}$ là *iđêan nguyên tố* nếu với mọi x, y thuộc R thoản mãn $xy \in \mathfrak{p}$ thì $x \in \mathfrak{p}$ hoặc $y \in \mathfrak{p}$. Ta kí hiệu $\mathrm{Spec}(R)$ là tập tất cả các iđêan nguyên tố của R.

Ví dụ 1.0.3. Ta có $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0), p\mathbb{Z} |\ p$ là một số nguyên tố$\}$.

Định nghĩa 1.0.4. Cho I là một iđêan của vành R. Khi đó R/I với phép nhân được định nghĩa như sau:

$$(x + I)(y + I) = xy + I;\ \forall x, y \in R$$

là một vành. Vành R/I xác định như trên được gọi là *vành thương* của R theo iđêan I.

Định nghĩa 1.0.5. Một vành R được gọi là *miền nguyên* nếu $R \neq 0$ và nếu $x, y \neq 0$ thì $xy \neq 0$.

Từ định nghĩa miền nguyên ta thấy ngay rằng iđêan (0) của một miền nguyên là một iđêan nguyên tố. Tổng quát ta có điều sau:

Định lý 1.0.6. *Iđêan $\mathfrak{p}$ của một vành R là iđêan nguyên tố khi và chỉ khi vành thương $R/\mathfrak{p}$ là một miền nguyên.*

Định nghĩa 1.0.7. Một iđêan I của R được gọi là một *iđêan tối đại* nếu $I \neq R$ và nó không chứa trong bất kỳ một iđêan thực sự nào. Ta ký hiệu $\mathrm{Max}(R)$ là tập hợp tất cả các iđêan tối đại của R.

Nhận xét 1.0.8.
(i) Mọi iđêan tối đại là iđêan nguyên tố.

(ii) Nếu R là một trường thì iđêan (0) là iđêan tối đại.

(iii) Iđêan I là tối đại khi và chỉ khi R/I là một trường.

Định nghĩa 1.0.9. Một vành R có duy nhất một iđêan tối đại $\mathfrak{m}$ được gọi là *vành địa phương. Ký hiệu là* $(R, \mathfrak{m})$.

Dưới đây là một số phép toán quan trọng của iđêan.

Định nghĩa 1.0.10. Cho I và J là hai iđêan. Khi đó ta định nghĩa:

(i) Phép cộng các iđêan, $I + J = \{a + b\,|a \in I, b \in J\}$.

(ii) Phép giao các iđêan, $I \cap J = \{a|a \in I \text{và } a \in J\}$.

(iii) Phép chia iđêan, $I : J = \{x|\, xJ \subseteq I\} \supseteq I$.

(iv) Phép lấy căn iđêan, $\sqrt{I} = \{x|\, \exists n : x^n \in I\}$.

Nhận xét 1.0.11. Nếu $J = (a_1, ..., a_k)$ thì $I : J = \bigcap\limits_{i=1}^{k} (I : a_i)$.

Ví dụ 1.0.12. Xét $R = \mathbb{Z}$, I và J là hai iđêan của $\mathbb{Z}$, $I = (a)$, $J = (b)$. Khi đó:

$I+J=\{ax+by\,|x,y\in\mathbb{Z}\}=\text{ƯCLN}\,(a,b)\,\mathbb{Z}$; $I\cap J=\text{BCNN}\,(a,b)\,\mathbb{Z}$;
$I:J=\left\{x\,\middle|xb\vdots a\right\}=\left\{x\vdots\frac{a}{\text{ƯCLN}(a,b)}\right\}=\left\langle\frac{a}{\text{ƯCLN}(a,b)}\right\rangle.$
$\sqrt{I}=\{p\,|\exists n:p^n\in I\}$ với $p=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ thì $\sqrt{I}=p_1...p_k\mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.0.13. *Căn của* 0 là tập hợp các phần tử lũy linh của R và được kí hiệu $\text{Nil}(R)$.

Ta có mối liên hệ của $\text{Nil}(R)$ với các iđêan nguyên tố như sau:

Định lý 1.0.14. *Trong vành giao hoán R ta có* $\text{Nil}(R)=\sqrt{0}=\bigcap\limits_{\mathfrak{p}\in\text{Spec}R}\mathfrak{p}$.

Định nghĩa 1.0.15. Iđêan $\mathfrak{q}$ của R được gọi là *iđêan nguyên sơ* nếu $\mathfrak{q}\neq R$ và với mọi $x.y$ thuộc $\mathfrak{q}$ và y không thuộc $\mathfrak{q}$ thì x^n thuộc $\mathfrak{q}$ với một số nguyên dương n nào đó.

Ví dụ 1.0.16. Trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$, với p là một số nguyên tố thì $p^\alpha\mathbb{Z}$ là iđêan nguyên sơ của $\mathbb{Z}$.

Mệnh đề 1.0.17. (i) $\mathfrak{q}$ *là iđêan nguyên sơ của R khi và chỉ khi* (0) *là iđêan nguyên sơ của $R/\mathfrak{q}$.*

(ii) 0 *là iđêan nguyên sơ của R thì mọi ước của* 0 *đều là lũy linh.*

(iii) *Nếu $\mathfrak{q}$ là iđêan nguyên sơ thì $\sqrt{\mathfrak{q}}$ là iđêan nguyên tố.*

Định lý 1.0.18 (Định lý tránh nguyên tố)**.** *Các mệnh đề sau là đúng cho một vành giao hoán R.*

(i) *Cho $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,...,\mathfrak{p}_n$ là những iđêan nguyên tố và $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R. Giả sử $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{p}_i$ với mọi $i=1,2,...,n$ khi đó $\mathfrak{a}\not\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$.*

(ii) *Cho $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,...,\mathfrak{a}_n$ là những iđêan và $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố của R. Nếu $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i\subseteq\mathfrak{p}$ thì khi đó tồn tại một chỉ số i sao cho $\mathfrak{a}_i\subseteq\mathfrak{p}$. Hơn nữa, khi $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i=\mathfrak{p}$ thì tồn tại chỉ số i sao cho $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{p}$.*

Chứng minh. (i) Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo n. Khi $n = 1$ thì kết luận là hiển nhiên. Giả sử (i) đã được chứng minh cho trường hợp $n - 1$, tức $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i \neq t} \mathfrak{p}_i$, với mọi $t = 1, 2, ..., n$. Vậy tồn tại những phần tử $x_t \in \mathfrak{a} \backslash \bigcup_{i \neq t} \mathfrak{p}_i$, với mọi $t = 1, ..., n$. Nếu $x_t \notin \mathfrak{p}_t$ với một số t nào đó, suy ra $x_t \in \mathfrak{a} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ và mệnh đề được chứng minh. Trái lại, giả sử $x_t \in \mathfrak{p}_t$, với mọi $t = 1, 2, ..., n$. Xét phần tử

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 ... \widehat{x_i} ... x_n$$

trong đó $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_1 x_2 ... \widehat{x_i} ... x_n$ kí hiệu cho tích các phần tử $x_1, ..., x_n$ sau khi bỏ đi phần tử x_i. Rõ ràng $x \in \mathfrak{a}$. Trong khi, nếu $x \in \mathfrak{p}_i$, kéo theo $x_1 x_2 ... \widehat{x_i} ... x_n \in \mathfrak{p}_i$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn x_t và do đó (i) được chứng minh.

(ii) Giả sử mệnh đề sai, tức là $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Khi đó tồn tại những phần tử $y_i \in \mathfrak{a}_i \backslash \mathfrak{p}$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Đặt $y = y_1 ... y_n$, ta suy ra $y = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$. Vậy phải tồn tại một chỉ số i sao cho $y_i \in \mathfrak{p}$ và điều này trái với cách chọn y_i. Bây giờ, nếu $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$ thì với chỉ số i ở trên ta có $\mathfrak{p} \subseteq a_i \subseteq \mathfrak{p}$. Điều này chứng tỏ $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$ và định lý được chứng minh. □

Bổ đề 1.0.19 (Bổ đề Zorn)**.** *Cho A là một tập khác rỗng với quan hệ thứ tự $\leq$. Giả sử mọi dãy tăng các phần tử trong A*

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq a$$

đều có phần tử chặn trên tức là tồn tại $a \in A$ sao cho $a_i \leq a$ với mọi $i \geq 1$ thì trong A tồn tại phần tử tối đại.

Hệ quả 1.0.20. *Cho R là một vành giao hoán. Khi đó R luôn có iđêan tối đại.*